

Déviaton d'un rayon lumineux au voisinage du Soleil

Christian MAGNAN

La déviation des rayons lumineux au voisinage du Soleil est l'un des premiers effets spectaculaires de la théorie de la gravitation façon Einstein. Mais comment calcule-t-on cet effet ? Il n'y a pas de façon simple d'y arriver car pour mener à bien le calcul il faut plonger dans la théorie de la relativité générale. Que voilà donc une bonne occasion de découvrir cette théorie tout en l'illustrant sur un exemple !

La dérivation des équations s'inspire directement de la présentation qu'en donnent Edwin F. Taylor et John Archibald Wheeler dans leur livre "Exploring Black Holes, Introduction to General Relativity" (Addison Wesley Longman, 2000).

1 Principe du calcul

Si l'aspect qualitatif et l'importance historique du phénomène de déflexion des rayons lumineux par le Soleil sont décrits en de nombreux endroits le calcul de l'angle de déviation est rarement indiqué. C'est à cet aspect numérique que je m'attacherai ici.

La relativité générale nous apprend qu'en se propageant dans l'espace un photon de lumière suit une « géodésique » de l'espace-temps. Il nous faut donc :

- définir ce qu'est une géodésique
- trouver les équations de cette géodésique
- trouver la solution de ces équations, qui donnera la trajectoire suivie par la lumière dans l'espace
- calculer l'angle entre la direction initiale et la direction finale de la lumière.

2 Métrique de l'espace-temps autour d'une masse attractive

En mécanique newtonienne on décrit le mouvement d'un corps dans un espace absolu par rapport à un temps absolu, la position du mobile M (fixée par ses coordonnées spatiales dans un certain repère) étant donnée en fonction du temps t . La théorie de la relativité déclare qu'il n'existe pas de temps absolu et

que ce temps ne peut pas être séparé de l'espace. Elle raisonne sur des *événements*, chaque événement étant caractérisé par un lieu M et un instant t . Quand on suit des événements attachés à un corps libre en mouvement, on parle de *ligne d'univers*.

Considérons par exemple un vaisseau spatial se déplaçant librement dans l'espace, c'est-à-dire en ayant coupé tous ses moteurs. Nous imaginons qu'il émet des éclairs à intervalles réguliers en accord avec une horloge située dans l'habitacle. Appelons τ cet intervalle temporel local entre deux éclairs successifs (mesuré donc par rapport au temps propre du vaisseau). Considérons maintenant un autre repère, que l'on peut imaginer comme étant constitué par un ensemble de bouées de l'espace, également libres de toute accélération, fixes les unes par rapport aux autres (chacune reste à la même distance de ses voisines), chacune portant à la fois une indication de sa position (par exemple sa distance à une origine donnée) et sa propre horloge. Les horloges de ce deuxième repère sont synchronisées entre elles. Dans ce repère l'intervalle entre deux éclairs (deux événements) est caractérisé par deux nombres : l'intervalle spatial s et l'intervalle temporel t . Pour les trouver il suffit de repérer quelle bouée est en face de l'éclair n° 1 et quelle est celle en face de l'éclair n° 2 et de noter l'heure des événements.

Le principe sur lequel se fonde la relativité restreinte est le suivant. L'intervalle de temps propre τ entre l'événement n° 1 et l'événement n° 2 est donné par la formule

$$\tau^2 = t^2 - s^2 \quad (1)$$

et cette quantité est indépendante du repère choisi. Autrement dit, toutes les observatrices s'accordent sur la valeur de τ ainsi calculée, bien que les valeurs de s et de t diffèrent d'un système de repérage à l'autre.

Remarque importante : sauf indication contraire, et c'est le choix qui a été fait en écrivant l'équation (1), les distances seront exprimées ici en unités de temps (comme on le fait souvent en astronomie). Si on utilisait au contraire une distance s exprimée en unités « courantes », par exemple en centimètres, on devrait passer de cette dernière à notre distance s exprimée en secondes par la formule $s(\text{en secondes}) = s(\text{en centimètres})/c$ où c est la vitesse de la lumière en unités courantes, soit 3×10^{10} cm/s. (La convention (commode!) d'exprimer distance et temps dans une même unité équivaut à prendre la vitesse de la lumière égale à l'unité.)

En relativité générale, le principe selon lequel l'intervalle de temps propre est indépendant du repère choisi reste valable, mais seulement localement, c'est-à-dire à condition de rester à l'intérieur d'une région suffisamment petite de l'espace-temps (la taille dépendant de la précision requise). La nouveauté principale concerne l'expression du temps propre donné par la formule (1), laquelle s'exprimera en fonction de coefficients dépendant du point considéré de l'espace-temps et prendra le nom de *métrique*. En fait toute la structure de l'espace-temps, et notamment sa courbure, est contenue dans l'expression locale de τ et dans la forme des coefficients qu'elle contient.

Nous nous intéressons ici à la structure de l'espace-temps autour du Soleil.

Pour écrire les choses localement nous considérons deux événements voisins, séparés par un écart infinitésimal des coordonnées temporelle et spatiales dt , dx , dy et dz . Si l'espace était plat, la métrique serait de la forme

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

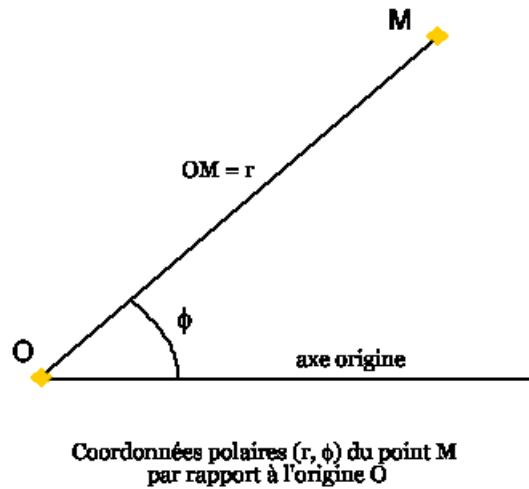
qu'on écrit rapidement (et un peu incorrectement) par convention sous la forme

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2)$$

En coordonnées sphériques, dans un plan passant par le centre du Soleil (ce qui supprime une coordonnée spatiale), cette formule devient

$$d\tau^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2$$

où r représente la distance au centre et ϕ un angle azimutal dans le plan considéré (voir la figure ci-dessous).



Mais l'espace-temps autour d'un astre gravitant de masse M (trou noir, voisinage du Soleil) n'est pas plat. Il est décrit par la *métrique de Schwarzschild*

$$d\tau^2 = (1 - 2M/r)dt^2 - (1 - 2M/r)^{-1}dr^2 - r^2 d\phi^2 \quad (3)$$

Extasions-nous : TOUTE la structure de l'espace-temps est contenue dans cette "simple" formule (3). Même le fameux trou noir est tapi derrière ces symboles.

Remarque : en quelle unité est exprimée la masse M dans cette formule ? On voit que M a les dimensions d'une longueur, grandeur que nous exprimons ici en secondes. Donc M est exprimée en secondes, la formule de conversion entre la masse en grammes et la masse en secondes étant

$$M(\text{en secondes}) = (G/c^3)M(\text{en grammes})$$

où $(G/c^3) = 2,5 \times 10^{-39}$ s/g.

3 Les équations d'une géodésique

La métrique, c'est-à-dire (très exactement) l'expression en un point de l'espace-temps de l'intervalle temporel entre deux événements voisins, traduit la présence d'une courbure de l'espace-temps dès l'instant où cette expression s'écarte de celle donnée en (2) correspondant à un espace euclidien. Cette métrique va nous permettre de caractériser le mouvement d'un corps libre de toute accélération. En effet, la relativité restreinte et la relativité générale nous apprennent qu'entre deux événements E_1 et E_2 , un corps libre suit le chemin qui rend maximum l'intervalle temporel τ . On peut dire de façon équivalente qu'un corps libre suit une géodésique de l'espace-temps et que cette propriété de maximisation de l'intervalle temporel constitue la définition d'une géodésique.

Définition d'une géodésique : *La géodésique entre deux événements E_1 et E_2 est la ligne d'univers qui rend maximum l'intervalle de temps propre entre E_1 et E_2 .*

C'est cette propriété de *maximisation du temps propre* qui va nous permettre de trouver les équations d'une géodésique. Elle va également nous donner l'expression de l'énergie et du moment angulaire d'une particule orbitant autour du centre attractif.

4 Énergie d'une particule

Appliquons le principe de maximisation de l'intervalle de temps propre de la façon suivante. Supposons qu'un vaisseau spatial dont les moteurs sont coupés tombe vers la masse attractive centrale selon une orbite radiale (donc rectiligne). Trois éclairs successifs voisins dans le temps et dans l'espace sont émis dans la cabine. Nous observons ces trois événements dans un certain repère extérieur. Dans ce dernier l'événement E_1 consiste en l'émission d'un éclair au temps $t = 0$ quand la cabine spatiale se trouve au rayon r_1 . L'éclair E_2 est émis au temps t quand la cabine est au rayon r_2 . L'éclair E_3 est émis au temps T quand la cabine est en r_3 . La quantité T est supposée petite. Nous supposons alors que nous faisons varier les coordonnées de l'événement intermédiaire E_2 . Le principe de maximisation du temps propre énonce que la géodésique partant de E_1 et aboutissant en E_3 passera par l'événement E_2 rendant maximum l'intervalle temporel propre

$$\tau = \tau_A + \tau_B, \quad (4)$$

où τ_A mesure l'intervalle sur le premier segment A de l'espace-temps reliant E_1 et E_2 et τ_B mesure l'intervalle temporel sur le second segment B reliant E_2 et E_3 .

Pour ne pas faire tout varier à la fois, nous supposons dans cette expérience que la position des rayons r_1 , r_2 et r_3 est fixée et que seul l'instant t où est émis l'éclair n° 2 varie. D'après la formule (3) l'intervalle temporel propre pour

le premier segment A est donné par son carré

$$\tau_A^2 = (1 - 2M/r_A)t^2 + (\text{termes ne contenant pas } t) \quad (5)$$

d'où on déduit

$$\tau_A d\tau_A = (1 - 2M/r_A)tdt \quad (6)$$

Le temps écoulé sur le segment B entre les événements E_2 et E_3 est $(T - t)$, et par conséquent la durée propre τ_B est donnée par

$$\tau_B^2 = (1 - 2M/r)(T - t)^2 + (\text{termes ne contenant pas } t) \quad (7)$$

d'où on déduit

$$\tau_B d\tau_B = -(1 - 2M/r_B)(T - t)dt. \quad (8)$$

Pour rendre maximum l'intervalle temporel total $\tau = \tau_A + \tau_B$ par rapport à une variation dt du temps t , nous écrivons

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau_A}{dt} + \frac{d\tau_B}{dt} = 0 \quad (9)$$

En tirant $d\tau_A$ et $d\tau_B$ des équations (6) et (8) et en posant de façon toute naturelle $t = t_A$ et $T - t = t_B$, il vient facilement

$$(1 - 2M/r_A)(t_A/\tau_A) = (1 - 2M/r_B)(t_B/\tau_B). \quad (10)$$

Le membre de gauche de cette équation ne dépend que des paramètres du premier segment A (connectant E_1 à E_2), le membre de droite ne dépend que de ceux du second segment B (connectant E_2 à E_3).

La quantité mise en évidence dans l'équation (10) ne dépend pas du segment choisi pour la calculer. C'est donc une constante du mouvement de la particule libre considérée. De bonnes raisons physiques (en particulier pour retrouver les formules de la relativité restreinte) conduisent à identifier cette constante comme le rapport de l'énergie du corps en mouvement à sa masse. Nous écrivons donc ce résultat capital sous la forme

$$E/m = (1 - 2M/r)(dt/d\tau) \quad (11)$$

expression dans laquelle nous sommes revenus à la notation différentielle pour les intervalles t et τ .

Incidemment on remarque qu'avec les unités que nous avons choisies, l'énergie E et la masse M s'expriment avec la même unité, par exemple la seconde.

5 Moment angulaire de la particule

Nous avons appliqué le principe de maximisation de l'intervalle temporel propre en faisant varier le temps de l'événement intermédiaire. Re commençons la même opération mais en faisant varier cette fois l'angle ϕ de cet événement, angle servant à repérer la direction du mobile par rapport à une direction origine

et que nous appellerons azimut. Nous considérons à nouveau trois événements consistant en l'émission d'un éclair à l'intérieur d'un vaisseau spatial flottant librement dans l'espace. Le premier segment A relie l'événement E_1 à l'événement E_2 . Le segment B relie E_2 à E_3 . L'angle du premier événement est fixé à $\phi = 0$, l'angle du dernier à $\phi = \Phi$ tandis que l'angle intermédiaire est pris comme variable, et égal à ϕ . De nouveau, pour ne pas faire varier tout à la fois, nous supposons que le rayon r auquel l'éclair n° 2 est émis reste toujours le même.

Le raisonnement se développe comme dans la section précédente. D'après la métrique (3), l'intervalle temporel τ_A sur le premier segment est donné par son carré

$$\tau_A^2 = -r_A^2 \phi^2 + (\text{termes ne contenant pas } \phi) \quad (12)$$

et l'intervalle τ_B sur le second par

$$\tau_B^2 = -r_B^2 (\Phi - \phi)^2 + (\text{termes ne contenant pas } \phi) \quad (13)$$

d'où il vient

$$\tau_A d\tau_A = -r_A^2 \phi d\phi \quad (14)$$

$$\tau_B d\tau_B = r_B^2 (\Phi - \phi) d\phi \quad (15)$$

On écrit que $d\tau/d\phi = d(\tau_A + \tau_B)/d\phi = 0$ et on obtient facilement, de façon analogue à l'équation (10)

$$r_A^2 \phi_A / \tau_A = r_B^2 \phi_B / \tau_B \quad (16)$$

en ayant posé tout naturellement $\phi = \phi_A$ et $\Phi - \phi = \phi_B$. Le membre de gauche, qui ne contient que des termes relatifs au premier segment, est égal à celui de droite, qui ne contient que des termes relatifs au second segment). Nous exhibons ainsi une autre constante du mouvement, à savoir $r^2 d\phi/d\tau$ (en repassant à la notation différentielle), que l'on est conduit à identifier avec le rapport du moment angulaire L de la particule à sa masse m , ce que nous écrivons

$$L/m = r^2 (d\phi/d\tau) \quad (17)$$

6 Calcul de la trajectoire

Techniquement parlant, la trajectoire d'un mobile libre d'accélération par moteur est déterminée comme suit. Connaissant l'énergie E et le moment angulaire L de la "particule" de masse m (E et L dépendent des conditions initiales) nous pouvons suivre la position de cette particule en incrémentant ses coordonnées temporelle t et spatiale r et ϕ au fur et mesure que son horloge propre compte le temps τ . Algébriquement, pour chaque incrément de temps propre $d\tau$, nous calculons (ou l'ordinateur calcule) les incréments dt , dr et $d\phi$ des coordonnées du mobile. Les carrés des incréments dt et $d\phi$ sont déduits des équations

(11) et (17) sous la forme

$$dt^2 = (E/m)^2(1 - 2M/r)^{-2}d\tau^2 \quad (18)$$

$$d\phi^2 = (L/m)^2r^{-4}d\tau^2 \quad (19)$$

Il nous manque l'expression de dr . Nous l'obtenons en portant ces valeurs de dt et $d\phi$ dans l'équation (3) de la métrique et en résolvant en fonction de dr , ce qui donne

$$dr^2 = \{(E/m)^2 - (1 - 2M/r)[1 + (L/m)^2r^{-2}]\} d\tau^2 \quad (20)$$

En faisant le rapport membre à membre des équations (20) et (19), on aboutit directement à l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{E}{L}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\left(\frac{m}{L}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] \quad (21)$$

7 Trajectoire de la lumière

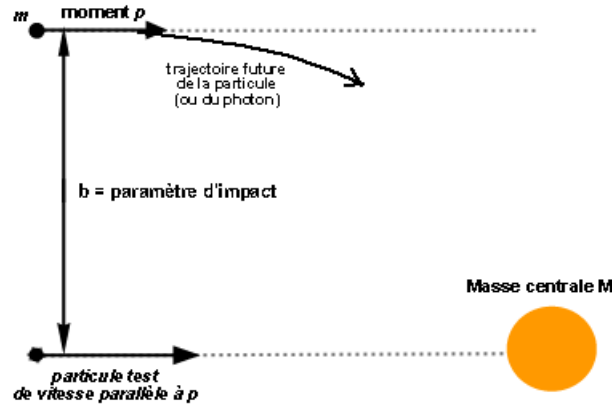
Appliquer directement à un photon le traitement précédent semble impossible. En effet nous avons calculé la trajectoire en fonction de l'incrémation du temps propre, or ce concept n'a pas de sens pour la lumière puisque l'intervalle entre deux événements situés le long de la ligne d'univers d'un photon est toujours nul (comme à la vitesse de la lumière on a $s = t$, l'intervalle $\tau^2 = t^2 - s^2$ s'annule).

Cependant il se trouve qu'en considérant un corps dont on fait tendre la masse vers zéro on aboutit à des résultats corrects. Ainsi pour $m = 0$ notre équation (21) devient

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{E}{L}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{r^2} \quad (22)$$

C'est cette équation qui va nous permettre de calculer la déviation des rayons lumineux près du Soleil.

Mais précisons les paramètres intervenant dans les formules. Tout d'abord le moment angulaire du mobile évalué à l'infini est par définition le produit de son moment linéaire p par ce que l'on appelle le "paramètre d'impact", noté b et représentant la distance du centre attractif (ici le Soleil) à la direction incidente de la particule en chute libre (voir la figure).



Autrement dit

$$L = p b \quad (23)$$

On sait d'autre part que la quantité de mouvement p d'un photon est égale à son énergie E . On en déduit immédiatement que

$$L/E = b. \quad (24)$$

Autrement dit le rapport L/E est égal au paramètre d'impact b et l'équation (22) s'écrit comme

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{1}{b^2} - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{1}{r^2} \quad (25)$$

8 Calcul de l'angle de déviation

La formule (25) va nous permettre maintenant de calculer de quel angle un rayon lumineux dévie lorsqu'il passe auprès du Soleil. Pour ce faire il faut faire la somme de toutes les incréments élémentaires $d\phi$ le long du trajet, c'est-à-dire calculer l'intégrale de $(d\phi/dr)dr$ lorsque r varie entre la distance minimum que nous noterons R (R est le rayon du Soleil si le rayon lumineux rase l'astre). Il convient encore de multiplier par 2 pour tenir compte des deux trajets symétriques que constituent l'approche et l'éloignement du photon.

Il faut préciser un dernier point : la relation entre les deux quantités b et R que nous avons introduites, et qui, bien entendu, ne sont pas indépendantes. Le point $r = R$ correspond au point où le photon lumineux passe le plus près du Soleil. En ce point, le mouvement du photon est donc purement tangentiel. La vitesse ne contenant aucune composante radiale, nous pouvons écrire qu'en ce point la dérivée dr/dt est nulle. Il suffit de prendre le dr déduit de l'équation (25) pour trouver

$$\frac{1}{b^2} = \left(1 - \frac{2M}{R} \right) \frac{1}{R^2} \quad (26)$$

et cette même équation (25) devient

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \frac{1}{R^2} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{r^2} \quad (27)$$

La forme de l'expression nous dicte de poser

$$u = R/r$$

où u varie entre 1 et 0. La dernière équation devient alors

$$\begin{aligned} (du/d\phi)^2 &= (1 - 2M/R) - (1 - 2Mu/R)u^2 \\ &\text{ou} \\ (du/d\phi)^2 &= 1 - u^2 - (2M/R)(1 - u^3) \end{aligned} \quad (28)$$

Par conséquent la variation $d\phi$ de l'azimut est donnée en fonction de la variation du de R/r par

$$\begin{aligned} d\phi &= [1 - u^2 - (2M/R)(1 - u^3)]^{-1/2} du \\ &= \frac{(1 - u^2)^{-1/2} du}{[1 - (2M/R)(1 - u^3)(1 - u^2)^{-1}]^{1/2}} \end{aligned} \quad (29)$$

La présence du terme $(1 - u^2)$ dans l'expression (29) nous engage à faire le changement de variable

$$u = \cos \alpha, \quad 0 < u < 1, \quad 0 < \alpha < \pi/2$$

lequel conduit à

$$d\phi = [1 - (2M/R)(1 - \cos^3 \alpha) \sin^{-2} \alpha]^{-1/2} d\alpha \quad (30)$$

En notant que

$$\frac{1 - \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} = \cos \alpha + \frac{1}{1 + \cos \alpha}$$

nous aboutissons à l'équation finale de la trajectoire sous la forme

$$d\phi = \left[1 - (2M/R) \left(\cos \alpha + \frac{1}{1 + \cos \alpha}\right)\right]^{-1/2} d\alpha \quad (31)$$

avec

$$\cos \alpha = R/r$$

Il est intéressant de noter que jusqu'à ce point nous n'avons fait aucune approximation.

9 Approximations et intégration

La petitesse du terme M/R va nous permettre de faire une approximation et de terminer ainsi l'intégration. En unités courantes la masse du Soleil est de 2×10^{33} grammes et son rayon est de 7×10^{10} centimètres. En utilisant le facteur $G/c^2 = 7,4 \times 10^{-29}$ cm/g permettant de passer des grammes aux centimètres, on a

$$M/R = (G/c^2)M(\text{en grammes})/R(\text{en centimètres}) = 2 \times 10^{-6}$$

Dans l'équation (31) nous pouvons donc utiliser l'approximation classique $(1 + \epsilon)^p \simeq 1 + p\epsilon$ pour aboutir à

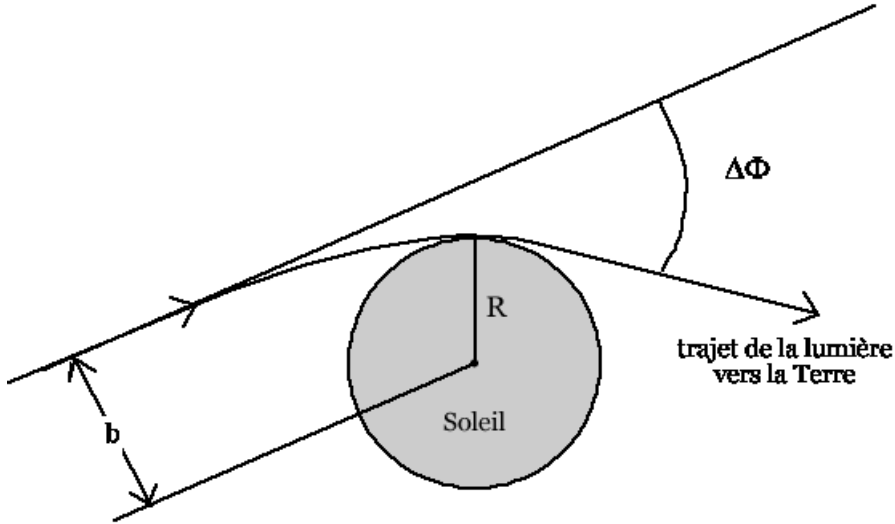
$$d\phi = \left[1 + (M/R) \left(\cos \alpha + \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right) \right] d\alpha \quad (32)$$

Par conséquent la variation totale de l'azimut ϕ sur le trajet du photon est

$$\phi = 2 \int_0^{\pi/2} \left[1 + (M/R) \left(\cos \alpha + \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right) \right] d\alpha \quad (33)$$

$$= 2 \left[\alpha + \frac{M}{R} \left(\sin \alpha + \tan \frac{\alpha}{2} \right) \right]_0^{\pi/2} \quad (34)$$

$$= \pi + 4M/R \quad (35)$$



Angle $\Delta\Phi$ de déflexion gravitationnelle de la lumière au voisinage du Soleil (considérablement exagéré)

Le premier terme π représente la variation totale de l'azimuth du photon en l'absence de Soleil, le photon se propageant alors en ligne droite. C'est le second terme qui fournit la déviation additionnelle $\Delta\phi$ par rapport à cette ligne droite

$$\Delta\phi = 4M/R \quad (36)$$

ou en unités courantes

$$\Delta\phi = 4(G/c^2)M(\text{grammes})/R(\text{centimètres}) \quad (37)$$

Numériquement, à la surface du Soleil, avec les valeurs déjà indiquées de la masse et du rayon solaires, on trouve $\Delta\phi = 8,5 \times 10^{-6}$ radian, ou (puisque π radians valent 180 degrés)

$$\Delta\phi = 1,75''$$