

# Précession de l'orbite de Mercure en relativité générale

Christian MAGNAN

L'avance du périhélie de Mercure est avec la déviation des rayons lumineux au voisinage du Soleil l'une des premières confirmations spectaculaires de la justesse de la théorie de la gravitation façon Einstein. Mais comment calcule-t-on ces effets ? Ni dans un cas ni dans l'autre il n'y a de façon simple d'y arriver car pour mener à bien le calcul il faut plonger dans la théorie de la relativité générale. Que voilà donc une bonne occasion de découvrir cette théorie tout en l'illustrant sur un exemple !

La dérivation des équations s'inspire directement de la présentation qu'en donnent Edwin F. Taylor et John Archibald Wheeler dans leur livre "Exploring Black Holes, Introduction to General Relativity" (Addison Wesley Longman, 2000). En revanche le calcul de l'intégrale donnant la valeur de la précession est adapté de celui développé par Steven Weinberg (Gravitation and Cosmology, Principles and Applications of the General Theory of Relativity, John Wiley & Sons, 1972).

## 1 Principe du calcul

Si l'aspect qualitatif et l'importance historique du phénomène de précession de l'orbite de Mercure, c'est-à-dire du déplacement orbite après orbite du périhélie (le point de la trajectoire où la planète est la plus proche du Soleil), sont décrits en de nombreux endroits le calcul de l'angle dont tourne l'ellipse à chaque révolution est rarement indiqué. C'est à cet aspect numérique que je m'attacherai ici.

La relativité générale nous apprend qu'en se déplaçant dans l'espace une masse en mouvement libre, c'est-à-dire non soumise à une accélération par moteur, suit une « géodésique » de l'espace-temps. Il nous faut donc :

- définir ce qu'est une géodésique
- trouver les équations de cette géodésique autour du Soleil
- trouver la solution de ces équations, qui donnera la trajectoire suivie par une planète (en première approximation c'est une ellipse : merci Newton !)
- calculer l'angle dont a tourné l'ellipse après une révolution complète

## 2 Métrique de l'espace-temps autour d'une masse attractive

En mécanique newtonienne on décrit le mouvement d'un corps dans un espace absolu par rapport à un temps absolu, la position du mobile M (fixée par ses coordonnées spatiales dans un certain repère) étant donnée en fonction du temps  $t$ . La théorie de la relativité déclare qu'il n'existe pas de temps absolu et que ce temps ne peut pas être séparé de l'espace. Elle raisonne sur des *événements*, chaque événement étant caractérisé par un lieu M et un instant  $t$ . Quand on suit des événements attachés à un corps libre en mouvement, on parle de *ligne d'univers*.

Considérons par exemple un vaisseau spatial se déplaçant librement dans l'espace, c'est-à-dire en ayant coupé tous ses moteurs. Nous imaginons qu'il émet des éclairs à intervalles réguliers en accord avec une horloge située dans l'habitacle. Appelons  $\tau$  l'intervalle temporel local entre deux éclairs successifs (mesuré donc par rapport au temps propre du vaisseau). Considérons maintenant un autre repère, que l'on peut imaginer comme étant constitué par un ensemble de bouées de l'espace, également libres de toute accélération, fixes les unes par rapport aux autres (chacune reste à la même distance de ses voisines), chacune portant à la fois une indication de sa position (par exemple sa distance à une origine donnée) et sa propre horloge. Les horloges de ce deuxième repère sont synchronisées entre elles. Dans ce repère l'intervalle entre deux éclairs (deux événements) est caractérisé par deux nombres : l'intervalle spatial  $s$  et l'intervalle temporel  $t$ . Pour les trouver il suffit de repérer quelle bouée est en face de l'éclair n° 1 et quelle est celle en face de l'éclair n° 2 en notant soigneusement l'heure des événements.

Le principe sur lequel se fonde la relativité restreinte est le suivant. L'intervalle de temps propre  $\tau$  entre l'événement n° 1 et l'événement n° 2 est donné par la formule

$$\tau^2 = t^2 - s^2 \quad (1)$$

et cette quantité est indépendante du repère choisi. Autrement dit, toutes les observatrices s'accordent sur la valeur de  $\tau$  ainsi calculée, bien que les valeurs de  $s$  et de  $t$  diffèrent d'un système de repérage à l'autre.

Remarque importante : sauf indication contraire, et c'est le choix qui a été fait en écrivant l'équation (1), les distances seront exprimées ici en unités de temps (comme on le fait souvent en astronomie). Si on utilisait au contraire une distance  $s$  exprimée en unités « courantes », par exemple en centimètres, on devrait passer de cette dernière à notre distance  $s$  exprimée en secondes par la formule  $s(\text{en secondes}) = s(\text{en centimètres})/c$  où  $c$  est la vitesse de la lumière en unités courantes, soit  $3 \times 10^{10}$  cm/s. (La convention (commode !) d'exprimer distance et temps dans une même unité équivaut à prendre la vitesse de la lumière égale à l'unité.)

En relativité générale, le principe selon lequel l'intervalle de temps propre est indépendant du repère choisi reste valable, mais seulement localement, c'est-à-dire à condition de rester à l'intérieur d'une région suffisamment petite de

l'espace-temps (la taille dépendant de la précision requise). La nouveauté principale concerne l'expression du temps propre donné par la formule (1), laquelle s'exprimera en fonction de coefficients dépendant du point considéré de l'espace-temps et prendra le nom de *métrique*. En fait toute la structure de l'espace-temps, et notamment sa courbure, est contenue dans l'expression locale de  $\tau$  et dans la forme des coefficients qu'elle contient.

Nous nous intéressons ici à la structure de l'espace-temps autour du Soleil. Pour écrire les choses localement nous considérons deux événements voisins, séparés par un écart infinitésimal des coordonnées temporelle et spatiales  $dt$ ,  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ . Si l'espace était plat, la métrique serait de la forme

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

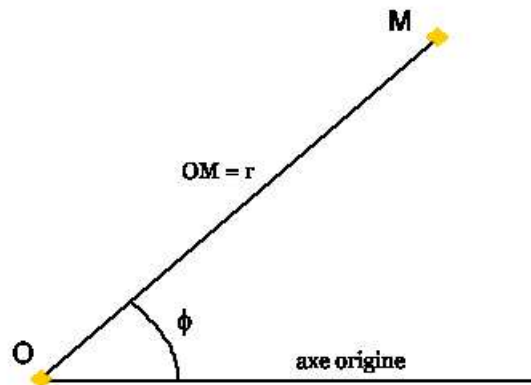
qu'on écrit rapidement (et un peu incorrectement) par convention sous la forme

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2)$$

En coordonnées sphériques, dans un plan passant par le centre du Soleil (ce qui supprime une coordonnée spatiale), cette formule devient

$$d\tau^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2$$

où  $r$  représente la distance au centre et  $\phi$  un angle azimutal dans le plan considéré (voir la figure ci-dessous).



**Coordonnées polaires  $(r, \phi)$  du point  $M$  par rapport à l'origine  $O$**

Mais l'espace-temps autour d'un astre gravitant de masse  $M$  (trou noir, voisinage du Soleil) n'est pas plat. Il est décrit par la *métrique de Schwarzschild*

$$d\tau^2 = (1 - 2M/r)dt^2 - (1 - 2M/r)^{-1}dr^2 - r^2 d\phi^2 \quad (3)$$

Extasions-nous : TOUTE la structure de l'espace-temps est contenue dans cette "simple" formule (3). Même le fameux trou noir est tapi derrière ces symboles.

Remarque : en quelle unité est exprimée la masse  $M$  dans cette formule ? On voit que  $M$  a les dimensions d'une longueur, grandeur que nous exprimons ici en secondes. Donc  $M$  est exprimée en secondes, la formule de conversion entre la masse en grammes et la masse en secondes étant

$$M(\text{en secondes}) = (G/c^3)M(\text{en grammes})$$

où  $(G/c^3) = 2,5 \times 10^{-39}$  s/g.

Selon les besoins, si on travaille avec des centimètres on peut écrire aussi

$$M(\text{en centimètres}) = (G/c^2)M(\text{en grammes})$$

où  $(G/c^2) = 7,4 \times 10^{-29}$  cm/g.

### 3 Les équations d'une géodésique

La métrique, c'est-à-dire (très exactement) l'expression en un point de l'espace-temps de l'intervalle temporel entre deux événements voisins, traduit la présence d'une courbure de l'espace-temps dès l'instant où cette expression s'écarte de celle donnée en (2) correspondant à un espace euclidien. Cette métrique va nous permettre de caractériser le mouvement d'un corps libre de toute accélération. En effet, la relativité restreinte et la relativité générale nous apprennent qu'entre deux événements  $E_1$  et  $E_2$ , un corps libre suit le chemin qui rend maximum l'intervalle temporel  $\tau$ . On peut dire de façon équivalente qu'un corps libre suit une géodésique de l'espace-temps et que cette propriété de maximisation de l'intervalle temporel constitue la définition d'une géodésique.

**Définition d'une géodésique :** *La géodésique entre deux événements  $E_1$  et  $E_2$  est la ligne d'univers qui rend maximum l'intervalle de temps propre entre  $E_1$  et  $E_2$ .*

C'est cette propriété de *maximisation du temps propre* qui va nous permettre de trouver les équations d'une géodésique. Elle va également nous donner l'expression de l'énergie et du moment angulaire d'une particule orbitant autour du centre attractif.

### 4 Énergie d'une particule

Appliquons le principe de maximisation de l'intervalle de temps propre de la façon suivante. Supposons qu'un vaisseau spatial dont les moteurs sont coupés tombe vers la masse attractive centrale selon une orbite radiale (donc rectiligne). Trois éclairs successifs voisins dans le temps et dans l'espace sont émis dans la cabine. Nous observons ces trois événements dans un certain repère extérieur.

Dans ce dernier événement  $E_1$  consiste en l'émission d'un éclair au temps  $t = 0$  quand la cabine spatiale se trouve au rayon  $r_1$ . L'éclair  $E_2$  est émis au temps  $t$  quand la cabine est au rayon  $r_2$ . L'éclair  $E_3$  est émis au temps  $T$  quand la cabine est en  $r_3$ . La quantité  $T$  est supposée petite. Nous supposons alors que nous faisons varier les coordonnées de l'événement intermédiaire  $E_2$ . Le principe de maximisation du temps propre énonce que la géodésique partant de  $E_1$  et aboutissant en  $E_3$  passera par l'événement  $E_2$  rendant maximum l'intervalle temporel propre

$$\tau = \tau_A + \tau_B, \quad (4)$$

où  $\tau_A$  mesure l'intervalle sur le premier segment  $A$  de l'espace-temps reliant  $E_1$  et  $E_2$  et  $\tau_B$  mesure l'intervalle temporel sur le second segment  $B$  reliant  $E_2$  et  $E_3$ .

Pour ne pas faire tout varier à la fois, nous supposons dans cette expérience que la position des rayons  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$  est fixée et que seul l'instant  $t$  où est émis l'éclair n° 2 varie. D'après la formule (3) l'intervalle temporel propre pour le premier segment  $A$  est donné par son carré

$$\tau_A^2 = (1 - 2M/r_A)t^2 + (\text{termes ne contenant pas } t) \quad (5)$$

d'où on déduit

$$\tau_A d\tau_A = (1 - 2M/r_A)t dt \quad (6)$$

Le temps écoulé sur le segment  $B$  entre les événements  $E_2$  et  $E_3$  est  $(T - t)$ , et par conséquent la durée propre  $\tau_B$  est donnée par

$$\tau_B^2 = (1 - 2M/r)(T - t)^2 + (\text{termes ne contenant pas } t) \quad (7)$$

d'où on déduit

$$\tau_B d\tau_B = -(1 - 2M/r_B)(T - t) dt. \quad (8)$$

Pour rendre maximum l'intervalle temporel total  $\tau = \tau_A + \tau_B$  par rapport à une variation  $dt$  du temps  $t$ , nous écrivons

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau_A}{dt} + \frac{d\tau_B}{dt} = 0 \quad (9)$$

En tirant  $d\tau_A$  et  $d\tau_B$  des équations (6) et (8) et en posant de façon toute naturelle  $t = t_A$  et  $T - t = t_B$ , il vient facilement

$$(1 - 2M/r_A)(t_A/\tau_A) = (1 - 2M/r_B)(t_B/\tau_B). \quad (10)$$

Le membre de gauche de cette équation ne dépend que des paramètres du premier segment  $A$  (connectant  $E_1$  à  $E_2$ ), le membre de droite ne dépend que de ceux du second segment  $B$  (connectant  $E_2$  à  $E_3$ ).

La quantité mise en évidence dans l'équation (10) ne dépend pas du segment choisi pour la calculer. C'est donc une constante du mouvement de la particule libre considérée. De bonnes raisons physiques (en particulier pour retrouver les formules de la relativité restreinte) conduisent à identifier cette constante comme

le rapport de l'énergie  $E$  du corps en mouvement à sa masse  $m$ . Nous écrivons donc ce résultat capital sous la forme

$$E/m = (1 - 2M/r)(dt/d\tau) \quad (11)$$

expression dans laquelle nous sommes revenues à la notation différentielle pour les intervalles  $t$  et  $\tau$ .

Incidentement on remarque qu'avec les unités que nous avons choisies, l'énergie  $E$  et la masse  $M$  s'expriment avec la même unité, par exemple la seconde (ou le centimètre).

## 5 Moment angulaire de la particule

Nous avons appliqué le principe de maximisation de l'intervalle temporel propre en faisant varier le temps de l'événement intermédiaire. Re commençons la même opération mais en faisant varier cette fois l'angle  $\phi$  de cet événement, angle servant à repérer la direction du mobile par rapport à une direction origine et que nous appellerons azimut. Nous considérons à nouveau trois événements consistant en l'émission d'un éclair à l'intérieur d'un vaisseau spatial flottant librement dans l'espace. Le premier segment  $A$  relie l'événement  $E_1$  à l'événement  $E_2$ . Le segment  $B$  relie  $E_2$  à  $E_3$ . L'angle du premier événement est fixé à  $\phi = 0$ , l'angle du dernier à  $\phi = \Phi$  tandis que l'angle intermédiaire est pris comme variable, et égal à  $\phi$ . De nouveau, pour ne pas faire varier tout à la fois, nous supposons que le rayon  $r$  auquel l'éclair n° 2 est émis reste toujours le même.

Le raisonnement se développe comme dans la section précédente. D'après la métrique (3), l'intervalle temporel  $\tau_A$  sur le premier segment est donné par son carré

$$\tau_A^2 = -r_A^2 \phi^2 + (\text{termes ne contenant pas } \phi) \quad (12)$$

et l'intervalle  $\tau_B$  sur le second par

$$\tau_B^2 = -r_B^2 (\Phi - \phi)^2 + (\text{termes ne contenant pas } \phi) \quad (13)$$

d'où il vient

$$\tau_A d\tau_A = -r_A^2 \phi d\phi \quad (14)$$

$$\tau_B d\tau_B = r_B^2 (\Phi - \phi) d\phi \quad (15)$$

Pour maximiser  $\tau = \tau_A + \tau - B$  on écrit que  $d\tau/d\phi = d(\tau_A + \tau_B)/d\phi = 0$  et on obtient facilement, de façon analogue à l'équation (10),

$$r_A^2 \phi_A / \tau_A = r_B^2 \phi_B / \tau_B \quad (16)$$

en ayant posé tout naturellement  $\phi = \phi_A$  et  $\Phi - \phi = \phi_B$ . Le membre de gauche, qui ne contient que des termes relatifs au premier segment, est égal à celui de droite, qui ne contient que des termes relatifs au second segment. Nous exhibons

ainsi une autre constante du mouvement, à savoir  $r^2 d\phi/d\tau$  (en repassant à la notation différentielle), que l'on est conduit à identifier (car c'est la même forme que la formule newtonienne) avec le rapport du moment angulaire  $L$  de la particule à sa masse  $m$ , ce que nous écrivons

$$L/m = r^2(d\phi/d\tau) \quad (17)$$

## 6 Calcul de la trajectoire

Techniquement parlant, la trajectoire d'un mobile libre d'accélération par moteur est déterminée comme suit. Connaissant l'énergie  $E$  et le moment angulaire  $L$  de la "particule" de masse  $m$  ( $E$  et  $L$  dépendent des conditions initiales) nous pouvons suivre la position de cette particule en incrémentant ses coordonnées temporelle  $t$ , spatiale  $r$  et angulaire  $\phi$  au fur et mesure que son horloge propre compte le temps  $\tau$ . Algébriquement, pour chaque incrément de temps propre  $d\tau$ , nous calculons (ou l'ordinateur calcule) les incréments  $dt$ ,  $dr$  et  $d\phi$  des coordonnées du mobile. Les carrés des incréments  $dt$  et  $d\phi$  sont déduits des équations (11) et (17) sous la forme

$$dt^2 = (E/m)^2(1 - 2M/r)^{-2} d\tau^2 \quad (18)$$

$$d\phi^2 = (L/m)^2 r^{-4} d\tau^2 \quad (19)$$

Il nous manque l'expression de  $dr$ . Nous l'obtenons en portant ces valeurs de  $dt$  et  $d\phi$  dans l'équation (3) de la métrique et en résolvant en fonction de  $dr$ , ce qui donne

$$dr^2 = \{(E/m)^2 - (1 - 2M/r)[1 + (L/m)^2 r^{-2}]\} d\tau^2 \quad (20)$$

En faisant le rapport membre à membre des équations (20) et (19), on aboutit directement à l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{E}{L}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\left(\frac{m}{L}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] \quad (21)$$

## 7 Trajectoire de la planète

En effectuant le changement de variable

$$u = 1/r, \quad du = -dr/r^2$$

l'équation (21) devient

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{E^2}{L^2} - (1 - 2Mu) \left(\frac{m^2}{L^2} + u^2\right). \quad (22)$$

Considérons une particule test accomplissant une orbite fermée autour du Soleil. Sa distance  $r$  à la masse centrale  $M$  passe forcément par un minimum  $r_-$  et un

maximum  $r_+$  correspondant respectivement au périhélie et à l'aphélie. Pour nous accorder avec le changement de variable  $u = (1/r)$  nous poserons

$$u_- = 1/r_- = v, u_+ = 1/r_+ = w, \text{ avec } r_- < r < r_+, w < u < v.$$

En ces deux points de la trajectoire la dérivée  $dr/d\phi$  s'annule, ce qui s'écrit :

$$\frac{E^2}{L^2} - (1 - 2Mv) \left( \frac{m^2}{L^2} + v^2 \right) = 0 \quad (23)$$

$$\frac{E^2}{L^2} - (1 - 2Mw) \left( \frac{m^2}{L^2} + w^2 \right) = 0. \quad (24)$$

Il est facile de tirer  $E^2/L^2$  et  $m^2/L^2$  de ces deux équations comme

$$\frac{m^2}{L^2} = [v + w - 2M(v^2 + vw + w^2)]/2M \quad (25)$$

$$\frac{E^2}{L^2} = (v + w)(1 - 2Mv)(1 - 2Mw)/2M \quad (26)$$

L'expression (22) prend alors la forme

$$\begin{aligned} \left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 &= (v + w)(1 - 2Mv)(1 - 2Mw)/2M \\ &- (1 - 2Mu)[v + w - 2M(v^2 + vw + w^2) + 2Mu^2]/2M \end{aligned} \quad (27)$$

qui s'annule bien pour  $u = v$  et  $u = w$ .

En multipliant à droite et à gauche par le facteur  $(1 - 2Mu)^{-1}$  et en développant ce terme au deuxième ordre en M

$$(1 - 2Mu)^{-1} \simeq 1 + 2Mu + 4M^2u^2$$

on obtient

$$\begin{aligned} (1 - 2Mu)^{-1} \left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 &= (v + w)(1 - 2Mv)(1 - 2Mw)(1 + 2Mu + 4M^2u^2)/2M \\ &- [v + w - 2M(v^2 + vw + w^2) + 2Mu^2]/2M \end{aligned} \quad (28)$$

L'astuce pour simplifier le membre de droite est de remarquer qu'on a affaire à un polynôme du deuxième degré en  $u$  qui s'annule pour  $u = v$  et  $u = w$ . Il est donc de la forme

$$C(v - u)(u - w)$$

(en négligeant des termes d'ordre  $M^3$ ). La valeur de la constante C est obtenue immédiatement en faisant  $u = 0$  comme

$$C = 1 - 2M(v + w)$$

ce qui permet d'écrire l'équation (28) de la trajectoire sous la forme finalement assez ramassée

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = (1 - 2Mu)[1 - 2M(v + w)](v - u)(u - w) \quad (29)$$

En prenant la racine carrée des membres de cette équation et négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à  $M^2$  la trajectoire de la particule autour du Soleil peut se calculer en intégrant l'expression

$$\frac{d\phi}{du} = \pm \frac{1 + M(u + v + w)}{\sqrt{(v - u)(u - w)}}. \quad (30)$$

L'intégration est triviale si on fait le changement de variable  $u \rightarrow \psi$  défini par

$$u = \frac{1}{2}(v + w) + \frac{1}{2}(v - w) \cos \psi \quad (31)$$

qui conduit sans peine à

$$\sqrt{(v - u)(u - w)} = \frac{1}{2}(v - w) \sin \psi = -du/d\psi$$

ou

$$\frac{du}{\sqrt{(v - u)(u - w)}} = -d\psi \quad (32)$$

Nous pouvons compter les angles à partir du périhélie. En ce point  $\phi = \psi = 0$  et  $u = v$ . À partir de ce point  $r$  augmente et donc  $u = 1/r$  diminue tandis que l'angle  $\psi$  augmente. En tenant compte des formules (30), (31) et (32) on aboutit à l'intégrale très simple

$$\phi(u) = \int_0^{\psi(u)} \left[ 1 + \frac{3M}{2}(v + w) + \frac{M}{2}(v - w) \cos \psi \right] d\psi \quad (33)$$

Le premier terme sous le crochet, égal à l'unité, conduit à l'ellipse newtonienne classique. En effet, si  $\phi = \psi$ , l'expression (31) fournit l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires  $(r, \phi)$  sous la forme

$$u \equiv \frac{1}{r} = \frac{1}{2}(v + w) + \frac{1}{2}(v - w) \cos \phi \quad (34)$$

ce qui correspond bien à une ellipse. De façon habituelle on écrit l'équation de cette ellipse sous la forme

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi} \quad (35)$$

où  $p$  est le paramètre de l'ellipse (parfois appelé le *semi-latus rectum*) et  $e$  son excentricité.

Par identification entre (34) et (35) on voit que

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2}(v + w) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_-} + \frac{1}{r_+} \right) \quad (36)$$

et

$$e = \frac{v - w}{v + w} = \frac{r_+ - r_-}{r_+ + r_-} \quad (37)$$

Toujours avec les notations habituelles le double du grand axe  $a$  de l'ellipse est

$$2a = r_- + r_+ \quad (38)$$

et on a la relation

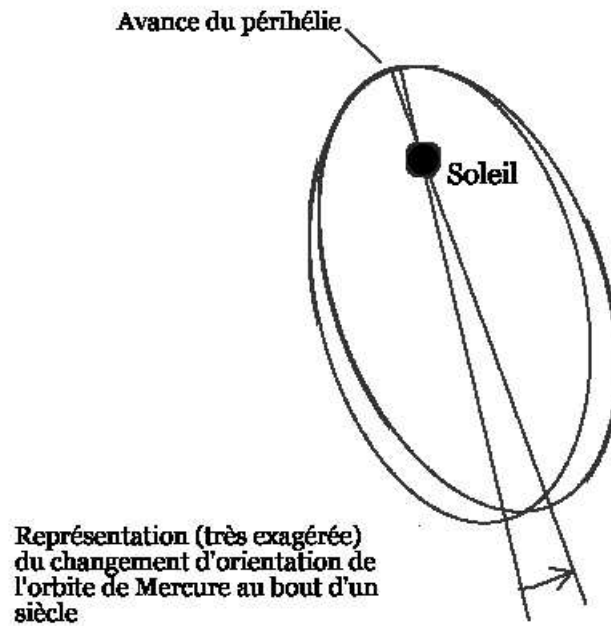
$$p = a(1 - e^2) .$$

## 8 Avance du périhélie

Le deuxième terme de l'intégrale (33), à savoir  $(3M/2)(v + w)$ , indique que l'angle  $\phi$  va augmenter de plus de deux fois  $\pi$  lorsque la planète revient au périhélie dont elle était partie. C'est le phénomène de précession de l'orbite. En fait nous multiplions par 2 l'augmentation de l'angle  $\phi$  entre le périhélie  $r_-$  (correspondant à  $\psi = 0$ ) et l'aphélie  $r_+$  (correspondant à  $\psi = \pi$ ) pour obtenir une précession par période égale à

$$\Delta\phi = \frac{6M\pi}{p} \quad (39)$$

où  $p$  est défini en (36).



Au troisième terme de l'intégrale (33) correspond un terme sinusoïdal en  $\sin \psi$  qui ne rajoute à la trajectoire qu'une perturbation périodique se comportant comme une sorte de bruit.

Calculons la valeur numérique de l'angle de précession. Le demi-grand axe de l'ellipse mercurienne vaut  $a = 5.8 \times 10^{12}$  cm et son excentricité  $e = 0.206$ . D'où  $p = 5.55 \times 10^{12}$  cm. La masse du Soleil en centimètres est  $M(\text{cm}) = (G/c^2)M(\text{g})$  qui donne (avec  $M = 2 \times 10^{33}$  g)  $M = 1.5 \times 10^5$  cm. D'où

$$\Delta\phi = 5 \times 10^{-7} \text{ radian/révolution} = 0.103''/\text{révolution}$$

Sachant qu'il y a 415 révolution par siècle, on en déduit une avance du périhélie de Mercure de

$$\Delta\phi = 43'' \text{ par siècle.}$$

## 9 Période de révolution

Profitons de toutes ces formules pour calculer la période de révolution  $T$  d'une planète autour du Soleil et retrouver le résultat newtonien. La formule (17) nous indique que l'incrément  $(1/2)r^2 d\phi = ((1/2)(L/m)d\tau$  est proportionnel au temps  $\tau$ . Or cette quantité n'est autre que l'aire élémentaire  $dA$  balayée par le rayon vecteur joignant le Soleil à la planète. Par conséquent l'aire totale balayée au temps  $\tau$  depuis le temps  $\tau = 0$  est

$$A = (1/2)(L/m)\tau \quad (40)$$

Au bout d'une révolution complète, le temps écoulé est  $T$  et l'aire balayée est égale à l'aire de l'ellipse, soit  $\pi ab$  si  $a$  et  $b$  sont les demi-axes. On en déduit

$$T = 2\pi(m/L)ab \quad (41)$$

En tenant compte de la formule (25) qui donne (en ignorant le terme en  $M$  dans la parenthèse)

$$\frac{m^2}{L^2} = \frac{1}{2}(v+w)/M = \frac{1}{pM}$$

et des relations connues

$$p = a(1 - e^2), \quad b = a\sqrt{1 - e^2},$$

on trouve

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{M}. \quad (42)$$

En unités conventionnelles, la formule s'écrit

$$T_s^2/a_{\text{cm}}^3 = 4\pi^2/(GM_g),$$

une forme dans laquelle la vitesse de la lumière n'intervient pas.